Universidade Federal Fluminense - GMA

VE2 - Cálculo 2B - Turma C1+C2 - Prof. Zhou Cong

Nome Completo: ____ Data: 04 de Dezembro de 2018

Questão 1 (20 pts)**.** Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ uma função definida por :

$$f(x, y) = \operatorname{sen}(xy^2) - y^3.$$

(a) (5 pts) Calcule a derivada direcional $\dfrac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}(1, 1)$ no ponto $(1, 1)$ na direção do vetor $\mathbf{v} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

(b) (8 pts) Escreva o polinômio de Taylor de grau 9 centrado no ponto $(0, 0)$ da função f.

(c) (7 pts) Calcule $\dfrac{\partial^9 f}{\partial x^3 \partial y^6}(0, 0)$ (dica: você pode usar o polinômio obtido no item (b)).

Questão 2 (25 pts + 5 bônus)**.** Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ uma função definida por:

$$f(x, y) = xy.$$

Considere o conjunto $C = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2; 5x^2 - 6xy + 5y^2 \leq 4\right\}$.

(a) (5 bônus) Esboçe o conjunto C.

(b) (10 pts) A função f possui máximo e mínimo no conjunto C? Justifique.

(c) (15 pts) Encontre todos os pontos de máximos e mínimos globais da função f no conjunto C.

Questão 3 (20 pts)**.** Considere a composição das três funções seguintes. A primeira função é uma curva $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ definida por:

$$\gamma(t) = (\cos(3t), \operatorname{sen} t, t).$$

A segunda função $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ é de classe C^1 e tal que as matrizes Jacobianas nos pontos $\left(0, \frac{1}{2}, 1\right)$ e $\left(-1, \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\pi}{3}\right)$ são respectivamente:

$$DF\left(0, \tfrac{1}{2}, 1\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad DF\left(-1, \tfrac{\sqrt{3}}{2}, \tfrac{\pi}{3}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

A terceira função é uma projeção $P : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ no plano yz, em outras palavras, $P(x, y, z) = (y, z)$. Calcule a matriz Jacobiana da composição $G = (P \circ F \circ \gamma) : \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^2$ no ponto $t = 1$, isto é:

$$\frac{dG}{dt}(1) = \frac{d}{dt}(P \circ F \circ \gamma)(1) = \ ?$$

Questão 4 (15 pts)**.** Considere a função $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada pela equação:

$$F(a, r) = \big(x(a, r), y(a, r)\big) = (a \sinh r, a \cosh r).$$

(a) (10 pts) Encontre todos os pontos $(a_0, r_0) \in \mathbb{R}^2$ tais que a função F possui uma inversa local.

(b) (5 pts) Calcule a matriz Jacobiana $\dfrac{\partial F^{-1}}{\partial(x, y)}(0, a)$ da função inversa no ponto $F(a, r) = (0, a)$.

Questão 5 (20 pts)**.** Considere a função $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ dada pela expressão:

$$F(\rho, \theta, \phi) = (x(\rho, \theta, \phi), y(\rho, \theta, \phi)) = (\cos\theta \operatorname{sen}\phi, \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\phi).$$

(a) (15 pts) Determine todos os pontos $(\rho_0, \theta_0, \phi_0)$ tais que a relação:

$$F(\rho, \theta, \phi) - (x_0, y_0) = (0, 0), \qquad \text{com } (x_0, y_0) = F(\rho_0, \theta_0, \phi_0).$$

define, a priori, (θ, ϕ) como funções de ρ numa vizinhança do ponto ρ_0.

(b) (5 pts) Calcule a derivada $\dfrac{d(\theta, \phi)}{d\rho}\left(0, \frac{\pi}{6}\right)$.

Boa Prova!